

GUÍA DE EJERCICIOS # 4

MA – 1111

I.- En los siguientes ejercicios se tiene $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Para el valor de ε dado, determine un $\delta > 0$ tal que: si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x) = 7$, $\varepsilon = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -4$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, $\varepsilon = 7$

(6) $\lim_{x \rightarrow 11} \sqrt{x - 2} = 3$, $\varepsilon = 4$

II.- Para los siguientes límites, dar una demostración formal usando ε y δ :

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x) = 7$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{4} = \frac{1}{4}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -2} (7 - 2x) = 11$

(5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$

(7) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4) = 12$

(6) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x) = 15$

III.- Calcular los siguientes límites:

(1) $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (5x^2 - x + 3)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} (4 - \frac{3}{x^2})$

(4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 4}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \sqrt{x^2 + 5x + 2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

(7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

(9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x+1} + 1}{x+2}$

(10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{x}$

(13) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

(15) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

(16) $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 - ux + 2u - 2x}{u^2 - u - 6}$

(17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ux - x - u}{x^2 + 2x - 3}$

(18) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - x - 6)}{x^2 + 4x + 4}$

(19) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}}$

(20) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

(21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

(22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

(23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x - 6}$

(24) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

$$(25) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$(26) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-4x-5}$$

$$(27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$$

IV.- Para las siguientes funciones determinar, si existen, los límites indicados:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 10 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1 - x| & \text{si } x > -1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^3 + 2 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

V.- Determinar, si existen, los siguientes límites:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \llbracket x - 3 \rrbracket$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket 4 - x \rrbracket)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} (\llbracket x \rrbracket - x)$$

VI.- Sea $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + k & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Hallar el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ exista.

VII.- Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b para que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existan.

VIII.- Sea f una función tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $|f(x) - 4| \leq x^2$.

Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

IX.- Sea g una función tal que, $|g(x) - 2| \leq 3(x^2 - 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

X.- Probar que $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 \cos\left(\frac{x}{x^2 - 4}\right) = 0$.

XI.- Calcular los siguientes límites:

(1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{4 + \cos x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} 2t \operatorname{csc} 3t$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + \operatorname{sen} 3x}{x \operatorname{sec} x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{x \cos x}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{x^3} \right)$

(9) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan^2 t}{\cos t - 1}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

(12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\operatorname{sen}(x - 3)}$

(14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x(\cos(x - 1) - 1)}$

(15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

XII.- Calcular los siguientes límites:

(1) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{x - 6}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{1 - x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x - 1} \right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{x + 4}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x}{9 - x^2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2}{9 - x^2}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3}{x^3 - x^2}$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - 4x^2}{5x^2 + 3x^3}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{3 - x}$

(11) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2 - 1}$

(13) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3}{x + 4} \right)$

(14) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{7}{x - 3} \right)$

(15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

(16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 4}{3x + 1}$

(17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5x}{2 - 3x}$

(18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{x^3}$

(19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

(20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

(21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{7x^2 - 5x + 4}$

(22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

(23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$

(24) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

(25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(26) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{8x^3 + x + 2}$

(28) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1})$